

Національна академія наук України  
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Директор Інституту механіки  
ім. С.П. Тимошенка НАН України  
академік НАН України



О.М. Гузь

## РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Чисельний аналіз механічної поведінки оболонкових систем

для здобувачів третього освітньо-наукового рівня вищої освіти  
«доктора філософії»

галузь знань	<b>11 Математика та статистика</b>
спеціальність	<b>113 «Прикладна математика»</b>
вид дисципліни	<b>вибіркова</b>

КИЇВ – 2022

**Розробники:**

Завідувач відділу обчислювальних методів

член-кореспондент НАН України,

професор, доктор фіз.-мат. наук



Олександр Григоренко

**Робочу програму узгоджено науково-методичною радою**

Протокол від з травня 2022 р. № 6

Голова науково-методичної ради \_\_\_\_\_



**Робочу програму затверджено Вченою радою Інституту механіки**

**ім. С.П. Тимошенка**

Протокол від 10 травня 2022 р. № 4

Голова вченої ради \_\_\_\_\_



Володимир НАЗАРЕНКО

**Робочу програму узгоджено з гарантом освітньої програми (керівником програми) 113 «Прикладна математика» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.**

Гарант освітньо-наукової програми \_\_\_\_\_



Володимир НАЗАРЕНКО

Пролонговано Вченою радою Інституту механіки ім.С.П. Тимошенка

Навчальні роки пролонгації	Голова Вченої ради Імех НАНУ	Підпис	№ протоколу	Дата протоколу
20__/20__				
20__/20__				
20__/20__				
20__/20__				

## 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Навчальна дисципліна вільного вибору аспіранта ДВА.04 «**Чисельний аналіз механічної поведінки оболонкових систем**» є теоретичною та практичною основою сукупності знань та вмінь, що формують профіль фахівця у галузі прикладної математики за спеціалізацією Інституту механіки ім С.П. Тимошенка НАН України. Дисципліна пов'язується із Блоком 2 освітньо-наукової програми, а навчання за цим курсом є тісно переплетеним із науковою діяльністю аспіранта на другому році аспірантури.

Найменування показників	Характеристика дисципліни
Вид дисципліни	вибіркова
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Загальний обсяг кредитів / годин	4/120
Курс	2
Семестр	3
Кількість змістових модулів з розподілом	2
Кількість кредитів	4
Обсяг академічних годин, в тому числі	120
Лекції	20
Практичні заняття	20
Самостійна робота	80
Форма підсумкового контролю	залік

## 2. МЕТА, ЗАВДАННЯ ТА ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Робоча програма навчальної дисципліни «Чисельний аналіз механічної поведінки оболонкових систем» є нормативним документом, який розроблено на основі освітньо-наукової програми, далі ОНП, (затверджена Вченою радою Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, протокол № 5 від «26» грудня 2017 року) підготовки здобувачів третього освітньо-наукового рівня вищої освіти відповідно до навчального плану спеціальності 113 «Прикладна математика».

Навчальна дисципліна «Чисельний аналіз механічної поведінки оболонкових систем» є складовою циклу професійної підготовки фахівців третього освітньо-наукового рівня “доктор філософії”.

**Передумова вивчення.** Програма курсу орієнтована на здобувачів третього освітньо-наукового рівня вищої освіти, які вже знайомі з дисциплінами професійної та практичної підготовки фахівців-механіків,

зокрема з курсом механіки суцільних середовищ, загальним курсом теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, чисельних методів та обов'язкових курсів освітньо-наукової програми ДВІ 1 та ДВІ 2, які вивчаються на першому курсі аспірантури. Вони повинні володіти методами математичного моделювання механічних систем та процесів.

**Метою навчальної дисципліни «Чисельний аналіз механічної поведінки оболонкових систем»** є ознайомлення аспірантів із фундаментальними поняттями класичної та уточненої теорії оболонок, відповідними розрахунковими схемами, оволодіння сучасними чисельними методами і алгоритмами розрахунку оболонок, отримання достовірних результатів обчислень.

**Головними завданнями** вивчення навчальної дисципліни «Чисельний аналіз механічної поведінки оболонкових систем» є формування знань, практичних навичок та компетентностей, потрібних для проведення самостійних кваліфікованих наукових досліджень:

- Загальні компетентності: ЗК1 – ЗК6 (відповідно до переліку загальних компетентностей ОНП).
- Спеціальні (фахові) компетентності: СК1 – СК7 (відповідно до переліку спеціальних компетентностей ОНП).
- Загальні програмні результати навчання: ПРН1 – ПРН6, ПРН11 (відповідно до переліку програмних результатів навчання ОНП).

#### **Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:**

1. *Знати:* основні поняття і методи теорії оболонок, основи тензорного аналізу, рівняння математичної фізики, звичайні диференціальні рівняння, чисельні методи, сучасні алгоритмічні мови програмування та основні принципи роботи сучасних персональних комп'ютерів.
2. *Вміти:* коректно формулювати крайові та спектральні задачі на основі базових співвідношень теорії оболонок для ізотропних та анізотропних матеріалів, розв'язувати за допомогою аналітичних та чисельних методів статичні й динамічні задачі теорії оболонок, застосовувати сучасну обчислювальну техніку до дослідження механічних процесів в оболонкових структурах.

#### **Анотація навчальної дисципліни.**

Дисципліна «Чисельний аналіз механічної поведінки оболонкових систем» спрямована на формування навичок проведення чисельного аналізу для дослідження механічної поведінки широкого класу оболонок з сучасних композитних матеріалів, який базується на побудові розрахункової схеми, вибору ефективного чисельного методу та його реалізації на сучасних персональних комп'ютерах, отримання достовірних результатів обчислень. Визначення особливостей проведення розрахунків для неоднорідних та анізотропних оболонок.

### **Навчальні цілі:**

набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) на рівні новітніх досягнень у розв'язанні задач механіки оболонок на основі чисельних методів, відповідно науково-освітньої кваліфікації «доктор філософії». Зокрема, розвивати: вміння користуватися основними теоріями оболонок та здатність застосовувати сучасні чисельні підходи для дослідження механічної поведінки тонкостінних пружних систем, які описуються крайовими та спектральними задачами для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, та вміти виконувати чисельне розв'язання деяких актуальних задач теорії пластин та оболонок й отримувати достовірну інформацію про розподіл полів напружень, переміщень та динамічних характеристик.

## **3. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

### **Тема 1. Класична та уточнена теорії оболонок.**

Приклади застосування оболонкових конструкцій в різних галузях промисловості та будівництві. Теорія Кірхгофа-Лява( класична теорія). Теорія типу Тимошенка (уточнена теорія). Перехід від тривимірної моделі до двовимірної моделі. Основні співвідношення теорій оболонок для випадку ізотропного та анізотропного матеріалу. Рівняння рівноваги та руху, закон Гука, співвідношення Коші. Випадок неоднорідної структури.

### **Тема 2. Постановка крайових та спектральних задач теорії оболонок.**

Крайова задача, яка описує напружений стан прямокутної пластини та пологої оболонки. Побудова системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. Задання граничних умов. Випадок ізотропного та анізотропного матеріалу. Спектральна задача, яка описує вільні коливання прямокутної пластини та пологої оболонки. Побудова системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. Задання граничних умов. Випадок ізотропного та анізотропного матеріалу.

### **Тема 3. Розв'язання одновимірних задач теорії оболонок**

Осесиметричні задачі крайові та спектральні задачі теорії оболонок. Метод відокремлення змінних. Метод Рунге -Кутта. Дискретно-континуальні чисельні підходи.

### **Тема 4. Метод дискретної ортогоналізації**

Основні положення методу дискретної ортогоналізації. Побудова коректної системи початкових умов. Ортогоналізація векторів, метод Грама-Шмідта. Особливості методу для крайових та спектральних задач. Побудова чисельного алгоритму методу дискретної ортогоналізації.

Особливості застосування методу дискретної ортогоналізації для розв'язування задач теорії оболонок. Випадок нестійкості обчислень.

### **Тема 5. Метод сплайн-колокацій**

Визначення сплайнів. Базисні сплайни із скінченними носіями. Поняття про В-сплайни. Кубічні сплайни та В-сплайни п'ятого ступеня. Основи методу сплайн-колокації. Зведення системи в частинних похідних до одновимірної методом сплайн-колокації. Задоволення граничних умов в методі сплайн-колокації. Розв'язок крайової задачі про напружений стан неоднорідної пологої оболонки методом сплайн-колокації. Критерії достовірності отриманих результатів при застосуванні методу сплайн-колокації.

### **Тема 6. Варіаційні методи, методи скінченних різниць та скінченних елементів в задачах теорії оболонок.**

Варіаційні методи. Метод Рітца. Метод Бубнова-Гальоркіна. Особливості їх застосування при дослідженні механічної поведінки оболонок. Приклади. Ідея методу скінченних різниць. Скінченно-різницеві рівняння деформації пологих оболонок. Задоволення граничних умов в методі скінченних різниць. Основні положення методу скінченних елементів. Застосування методу скінченних елементів в задачах теорії оболонок. Особливості розбиття області оболонки скінченними елементами.

## **4. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ (РОЗПОДІЛ ГОДИН)**

№	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самост. робота
<i>Змістовний модуль 1. Основи теорії оболонок та їх моделі</i>				
1	Класична та уточнена теорії оболонок. Просторова модель.	4	4	16
2	Постановка крайових та спектральних задач теорії оболонок.	2	2	8
3	Побудова розв'язувальних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних в задачах теорії оболонок. Метод відокремлення змінних.	4	4	16
<i>Змістовний модуль 2. Застосування аналітичних та чисельних методів в задачах теорії оболонок</i>				
4	Метод дискретної ортогоналізації. Особливості та прик-	4	4	16

	лади застосування.			
5	Метод сплайн-колокацій. Особливості та приклади застосування.	4	4	16
6	Варіаційні методи, методи скінченних різниць та скінченних елементів в задачах теорії оболонок.	2	2	8
Всього годин за семестр		20	20	80

## 5. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### *Змістовний модуль 1. Основи теорії оболонок та їх моделі*

#### **Тема 1.** Класична та уточнена теорії оболонок

Л-(1/2): Приклади застосування оболонкових конструкцій в різних галузях промисловості та будівництві. Теорія Кірхгофа-Лява ( класична теорія). Теорія типу Тимошенка (уточнена теорія). Перехід від тривимірної моделі до двовимірної.

*Практичне заняття 1.* Математична модель, на якій базується перехід від просторової теорії пружності до дифереенціальних рівнянь теорії оболонок.

#### *Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу який винесено на самостійне вивчення:
  - Застосування конструктивних оболонкових елементів в сучасній техніці. Криволінійні ортогональні системи координат. Основні принципи побудови теорій оболонок. Особливості класичної та некласичної теорії оболонок.

Л-(2/2): Основні співвідношення теорій оболонок для випадку ізотропного та анізотропного матеріалу. Рівняння рівноваги та руху, закон Гука, співвідношення Коші. Випадок неоднорідної структури.

*Практичне заняття 2.* Співвідношення класичної та некласичної теорій оболонок в циліндричній та сферичній системі координат. Закон Гука для анізотропних тіл.

#### *Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення:
  - Матриця жорсткості і матриця податливості.

**Література:** основна – 1, 5,6; додаткова – 2.

**Тема 2.** Постановка крайових та спектральних задач теорії оболонок.

Л-(1/2): Крайова задача, яка описує напружений стан прямокутної пластини та пологої оболонки. Побудова розв'язувальної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. Задання граничних умов. Випадок ізотропного та анізотропного матеріалу.

*Практичне заняття 1.* Розв'язувальні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних для прямокутних пластин різної геометрії.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення:
  - Задання граничних умов прямокутної пластини для ізотропних та анізотропних матеріалів..

Л-(2/2): Спектральна задача, яка описує вільні коливання прямокутної пластини та пологої оболонки. Побудова системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. Задання граничних умов. Випадок ізотропного та анізотропного матеріалу

*Практичне заняття 2.* Задача Штурма-Ліувіля, особливості її розв'язання.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, що винесений на самостійне вивчення:
  - Вільні коливання прямокутних пластин неоднорідної структури

**Література:** основна – 1, 2, 4, 6; додаткова – 2,3.

**Тема 3.** Побудова розв'язувальних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних в задачах теорії оболонок.

Л-(1/2): Осесиметричні крайові та спектральні задачі теорії оболонок для ізотропних та анізотропних тіл. Поняття про композитні та функціонально-градієнтні матеріали. Метод відокремлення змінних.

*Практичне заняття 1.* Напружено-деформований стан та вільні коливання циліндричних оболонок. Властивості симетрії.



*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення:
  - Застосування методу відокремлення змінних в випадку осесиметричних коливань циліндричних оболонок.

**Література:** основна – 1, 2,3,5; додаткова – 2, 5.

***Змістовний модуль 2. Застосування аналітичних та чисельних методів в задачах теорії оболонок***

**Тема 4.** Метод дискретної ортогоналізації

Л-(1/2): Основні положення методу дискретної ортогоналізації. Побудова коректної системи початкових умов. Ортогоналізація векторів, метод Грама-Шмітта. Особливості методу для крайових та спектральних задач.

*Практичне заняття 1.* Побудова граничних умов на при застосуванні методу дискретної ортогоналізації

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення:
  - Приклади ортогоналізації векторів.

**Література:** основна – 1.2, 3,4, 5, 6; додаткова – 2,5.

Л-(2/2): Побудова чисельного алгоритму методу дискретної ортогоналізації. Особливості застосування методу дискретної ортогоналізації для розв'язування задач теорії оболонок. Випадок нестійкості обчислень.

*Практичне заняття 2.* Побудова граничних умов при застосування методу дискретної ортогоналізації для дослідження напруженого-деформованого стану і вільних коливань циліндричних оболонок.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення:
  - Особливості застосування методу дискретної ортогоналізації в випадку неодорідного матеріалу оболонок.

**Література:** основна – 1, 4, 6; додаткова – 4,5.

## **Тема 5.** Метод сплайн-колокацій.

Л-(1/2): Визначення сплайнів. Базисні сплайни із скінченними носіями. Поняття про В-сплайни. В-сплайни третього та п'ятого ступеня.

*Практичне заняття 1.* Застосування В-сплайнів до розрахунку оболонок.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення:
  - Основні властивості сплайн-функцій; їх відмінність від звичайних поліномів.

**Література:** основна – 1, 2, 5, 6; додаткова – 1,2.

Л-(2/2): Основи методу сплайн-колокації. Зведення системи в частинних похідних до одновимірної методом сплайн-колокації. Задоволення граничних умов в методі сплайн-колокації. Розв'язок крайової задачі про напружений стан неоднорідної пологої оболонки методом сплайн-колокації. Критерії достовірності отриманих результатів при застосуванні методу сплайн-колокації

*Практичне заняття 2.* Застосування методу сплайн-апроксимації до розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення:
  - Розв'язання задачі про вільні коливання жорстко закріплених прямокутних пластин на основі застосування сплайн-колокації.

**Література:** основна – 1, 4, 5, 6; додаткова – 1,2.

## **Тема 6.** Варіаційні методи, методи скінченних різниць та скінченних елементів в задачах теорії оболонок.

Л-(1/2): Варіаційні методи. Метод Рітца. Метод Бубнова-Гальоркіна. Основні положення методу скінченних елементів. Особливості їх застосування при дослідженні механічної поведінки оболонок. Приклади.

*Практичне заняття 1.* Особливості розбиття області оболонки скінченними елементами. Критерії достовірності результатів обчислень.

### *Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення:
  - Методи розв'язання алгебраїчних систем високого порядку при застосуванні варіаційних методів.

**Література:** основна – 1,6; додаткова – 3,4,5.

### **САМОСТІЙНА РОБОТА АСПІРАНТА, ЇЇ ЗМІСТ ТА ОБСЯГ**

п/п	Зміст самостійної роботи аспіранта	Обсяг СР (годин)
1.	Опрацювання лекційного матеріалу	20
2.	Підготовка до практичних занять	20
3.	Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення	40
<b>Усього за навчальною дисципліною</b>		<b>80</b>

## **6. СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ**

Рейтинг аспіранта другого року із спеціальності 113 Прикладна математика з даної дисципліни складається з балів, що він отримує за:

1. Експрес-контроль – 20 балів.
2. Активну роботу на практичних заняттях - 20 балів.
3. Модульні контрольні роботи -20 балів ( 2x10=20)
4. Залік - 40 балів.

Заохочувальні та штрафні бали:

1. Відсутність на лекції без поважних причин - (-) 1 бал.
2. Відсутність на індивідуальних заняттях без поважних причин (-) 2 бали.
3. Подана в журнал стаття за темою курсу + (+) 10 балів.

Сума як штрафних, так і заохочувальних балів не має перевищувати 0,1R=10 балів.

### **6.1 Система рейтингових балів та критерії оцінювання**

1. Експрес-контроль (ваговий бал – 20) проводиться з метою перевірки якості роботи здобувачів третього рівня освіти в аудиторії і самостійної роботи в позааудиторний час шляхом усного описування чи самостійних робіт тривалістю 10 – 30 хвилин, або індивідуальних домашніх завдань протягом семестру.

2. Курс передбачає те, що аспірант планує скористатися отриманими знаннями в наукових дослідженнях, що в ідеальному варіанті означає

підготовку наукових праць, де використовуються набуті знання. В процесі індивідуальних занять із викладачем та самостійної роботи, аспірант працює над вибраною темою дисертації. За це аспірант може отримати наступні бали: 10 балів – демонстрація розуміння того як матеріали курсу використовуються іншими дослідниками в наукових працях за темою дисертаційної роботи; 20 балів – демонстрація розуміння як теоретичні положення курсу можна застосувати у власних дослідженнях за темою дисертаційної роботи; 30 балів – практичне використання набутих знань в дослідженнях за темою; 40 балів – використання наб утих знань при підготовці публікацій за темою дисертаційної роботи.

3. Залік (ваговий бал - 40) складається аспірантом в а удиторний час і складається з завдань, кожне з яких оцінюється за бальною системою.

## 6.2 Розрахункова шкала рейтингу для спеціальностей

Сума вагових балів протягом семестру складає:  $R C = 20 + 40 + 40 = 100$  (балів).

Рейтинг RD аспіранта складається з рейтингу, одержаного протягом семестру з урахуванням заохочувальних і штрафних балів. Необхідною умовою допуску аспіранта до екзамен у з дисципліни є позитивний рейтинг з усіх форм семестрової атестації. Аспіранти, які набрали протягом семестру менше 30 балів, зобов'язані підвищити свій рейтинг, інакше вони не допускаються до заліку з цієї дисципліни і мають академічну заборгованість. Для підвищення рейтингу вони отримують можливість написати додаткову контрольну роботу та виконати індивідуальні домашні завдання.

### Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену	для заліку
90 – 100	<b>A</b>	відмінно	зараховано
82-89	<b>B</b>	добре	
74-81	<b>C</b>		
64-73	<b>D</b>	задовільно	
60-63	<b>E</b>		
35-59	<b>FX</b>	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0-34	<b>F</b>	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

**«Відмінно» A (90-100 балів)** – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу з можливими незначними недоліками

«Добре» - В (82-89 балів) – дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок.

«Добре» - С (74-81 балів) – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок.

«Задовільно» - D (64-73 балів) – виставляється аспіранту, який має знання тільки основного матеріалу, але не засвоїв його деталей, допускає неточності, неправильне тлумачення окремих елементів завдання та відчуває труднощі при виконанні практичних завдань.

«Задовільно» - E (60-63 балів) – достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь).

«Незадовільно» - FX (35-59 балів) - виставляється аспіранту, який дає необґрунтовані відповіді на запитання, допускає суттєві помилки у використанні понятійного апарату. Не простежується логічність та послідовність думки. Формулювання хаотичні та не усвідомлені.

«Незадовільно» - F (1-34 балів) - виставляється аспіранту, який не засвоїв зміст дисципліни, вміння та навички не набуті.

## 7. ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЗАЛІКУ

1. Класична та уточнена теорії оболонок.
2. Теорія Кірхгофа-Лява( класична теорія). Теорія типу Тимошенка (уточнена теорія). Перехід від тривимірної моделі до двовимірної моделі.
3. Основні співвідношення теорій оболонок для випадку ізотропного та анізотропного матеріалу. Рівняння рівноваги та руху, закон Гука, співвідношення Коші. Випадок неоднорідної структури.
4. Постановка крайових та спектральних задач теорії оболонок.
5. Крайова задача, яка описує напружений стан прямокутної пластини та оболонки. Побудова розв’язувальної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних.
6. Задання граничних умов. Випадок ізотропного та анізотропного матеріалу.
7. Спектральна задача, яка описує вільні коливання прямокутної пластини та оболонки. Побудова розв’язувальної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних.
8. Розв’язання одновимірних задач теорії оболонок. Осесиметричні задачі крайові та спектральні задачі теорії оболонок.
9. Метод відокремлення змінних.
10. Метод Рунге -Кутта.
11. Метод дискретної ортогоналізації.
12. Побудова коректної системи початкових умов.
13. Ортогоналізації векторів, метод Грама -Шмідта.
14. Метод сплайн-колокацій . Визначення сплайнів.

15. Базисні сплайни із скінченими носіями. Поняття про В-сплайни. Кубічні та В-сплайни п'ятого ступеня.
16. Зведення системи в частинних похідних до одновимірної методом сплайн-колокації. Задоволення граничних умов в методі сплайн-колокації.
17. Варіаційні методи. Основні положення.
18. Метод Рітца.
19. Метод Бубнова-Гальоркіна.
20. Ідея методу скінчених різниць. Скінченно-різницеві рівняння деформації пологих оболонок.
21. Основні положення методу скінчених елементів.
22. Застосування методу скінчених елементів в задачах теорії оболонок. Особливості розбиття області оболонки скінченими елементами.

## **8. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ**

### **8.1. Основні рекомендовані джерела**

1. Grigorenko Ya.M. Grigorenko A.Ya. Vlaikov. G.G. Problems of Mechanics for Anisotropic Inhomogeneous Shells on the Basis of Different Models, Kyiv, 2009, Academperiodika, 550 p.
2. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. General Theory and Applications of Classical Theory – Volume I, Springer, 2016) 116p.
3. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory, Applications of Refined and Three-dimensional Theory – Volume II A, Springer, 2016, 42p
4. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Grigorenko Ya. M., Vlaikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory, Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory – Volume II B, Springer, 2016, 108p.
5. Григоренко Я.М., Мукоєд А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ, Вища Школа, 1979, 280с.
6. Григоренко Я.М., Будак В.Д., Григоренко О.Я. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів, Миколаїв, Іліон, 294 с.

### **8.2. Додаткові рекомендовані джерела**

1. Alberg JH, Nielson E, Walsh J. Theory of splines and their applications. Academic Press, New York, 1967, 254 p.
2. Budak V.D., Grigorenko A. Ya. Free Vibrations of Anisotropic Heterogeneous Shell Structures Mukolayv, Ilion, 2017, 246 p .
3. Reddy JN (2005) An introduction to the finite element method. McGraw-Hill Education, New York, 2005, 385 p.
4. Reddy JN (2007) Theory and analysis of elastic plates and shells. CRC Press, Taylor and Francis, Boca Raton, 2007, 278 p.

### **8.3. Інші інформаційні джерела (ресурси)**

Оскільки цей курс по вибору безпосередньо пов'язується із темою дисертаційних досліджень, список додаткових інформаційних джерел, який складається із наукових статей, опублікованих, як правило, за останні два - три роки складається індивідуально для кожного аспіранта.